

CONCOURS D'ACCES A L'ENSAM-MEKNES ET A L'ENSAM-CASABLANCA

Epreuve de Mathématiques : Filière Sciences Mathématiques A et B

Vendredi 24 Juillet 2015 - Durée : 2h

Partie I : Questions à réponses précises

Chaque réponse est notée sur 2pts

	Questions	Réponses
Q1	Soit la proposition P : " $\forall a \in \mathbb{R}_+^* ; a + \frac{1}{a} \geq 2$ ". Donner la négation et le tableau de vérité de la proposition P .	\bar{P} : P est
Q2	Le code confidentiel d'une carte bancaire est constitué d'un nombre de 4 chiffres non nuls. Combien y-a-t-il de codes contenant une fois, et une seule, le chiffre 1 ?	
Q3	Soient les nombres complexes suivants : $z = e^{\frac{2\pi}{7}i}$, $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$. Sachant que $a + b = -1$ et $\bar{b} = a$, donner la valeur de la somme $S = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.	$S =$
Q4	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectivement $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$. Donner la forme trigonométrique de $z = \frac{c-a}{b-a}$, et déduire l'angle θ de la rotation qui transforme B en C .	$z =$ $\theta =$
Q5	Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $3^{\cos(x)} + 3^{\cos(\pi-x)+1} \leq 2\sqrt{3}$.	$S =$
Q6	Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; où $f(x) = \frac{e^{2x} - \cos(x)}{2x^2}$.	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$
Q7	Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(x)}{x+1} + 1$ si $x > 0$ et $g(0) = a \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de a pour que g soit continue sur $[0, +\infty[$.	$a =$ ρ
Q8	Soit $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. Déterminer f^{-1} .	$Df^{-1} =$ $f^{-1}(x) =$
Q9	Déterminer la primitive F de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$ qui vaut 1 en e .	$F(x) =$
Q10	Calculer, en utilisant les sommes de Riemann, la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$.	$\lim_n u_n =$
Q11	Soient $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x)$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que : $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 1\text{cm}$. Calculer l'aire A de la surface délimitée par \mathcal{C}_f et les droites $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.	$A =$
Q12	Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$, $\forall n \geq 1$. Calculer $\lim_n I_n$.	$\lim_n I_n =$
Q13	Sachant que $x \mapsto \sin^2(x)$ est une solution de l'équation différentielle $(E): y'' + 4y - 2 = 0$, déterminer la solution particulière y_0 de (E) telle que sa courbe passe par $A(0, \sqrt{2})$ et ayant une tangente en A de coefficient directeur 1.	$y_0 =$
Q14	Soit S la sphère d'équation cartésienne: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0$. Déterminer l'équation (E) du plan tangent \mathcal{P} à S au point $O(0,0,0)$.	$(E):$
Q15	Sachant que $10^{3n} \equiv 1[27]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste r de la division euclidienne de $10^{100} + 100^{10}$ par 27.	$r =$
Q16	Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $x^2 - 2y^2 + xy + 2 = 0$	$S =$
Q17	Une usine produit des pièces dont 2% sont défectueuses. Après contrôle, on s'est aperçu que 97% des pièces bonnes sont acceptées et 99% des pièces défectueuses sont rejetées. Quelle est la probabilité P d'avoir une pièce bonne et rejetée ?	$P =$

Une réponse correcte = 2pts, aucune réponse = 0pts, plus d'une réponse ou une réponse fausse = -1pt

Q18. Soit $M_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ vérifie :

- | | | | |
|--|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> $A^3 \neq 2I$ | <input type="checkbox"/> A non inversible | <input type="checkbox"/> $\{I, A^3\}$ libre dans $M_3(\mathbb{R})$ | <input type="checkbox"/> A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A^2$ |
|--|---|--|--|

Q19. Soient l'espace vectoriel réel $E = \{f: x \mapsto (ax + b)e^{2x}; a, b \in \mathbb{R}\}$ et f_1 et f_2 les deux éléments de E définies par : $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$. Soit $B = \{f_1, f_2\}$ et $g: x \mapsto \int_0^x (t + \frac{1}{2})e^{2t} dt$. Alors

- | | | | |
|--|---------------------------------------|---|---|
| <input type="checkbox"/> les vecteurs f_1 et f_2 sont liés | <input type="checkbox"/> $g \notin E$ | <input type="checkbox"/> B est une base de E et les coordonnées de g dans B sont $(0, \frac{1}{2})$ | <input type="checkbox"/> B est une base de E et les coordonnées de g dans B sont $(0, 1)$ |
|--|---------------------------------------|---|---|

Q20. On considère le disque unité $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ et la proposition $P: \exists A, B \subset \mathbb{R}; D = A \times B$. Alors

- | | | | |
|--|--|---|--|
| <input type="checkbox"/> $(1, 0) \in D$ et P est vraie | <input type="checkbox"/> $(0, 1) \in D$ et P est vraie | <input type="checkbox"/> P est fausse | <input type="checkbox"/> aucune des trois réponses |
|--|--|---|--|

Q21. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. L'équation : $f(x) = 1 - x^n, n \geq 1$

- | | | | |
|--|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> n'a pas de solution | <input type="checkbox"/> admet deux solutions distinctes | <input type="checkbox"/> admet une solution unique | <input type="checkbox"/> aucune des trois réponses |
|--|--|--|--|

Q22. Soit $f(x) = x - \ln|2e^x - 1|$. Alors

- | | | | |
|---|---|---|--|
| <input type="checkbox"/> f bornée au voisinage de $-\infty$ | <input type="checkbox"/> f n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$ | <input type="checkbox"/> f bornée au voisinage de $+\infty$ | <input type="checkbox"/> aucune des trois réponses |
|---|---|---|--|

Q23. Soit $f(x) = \frac{e^x - 1}{x} + \ln(x)$. La courbe représentative \mathcal{C}_f de f

- | | | | |
|---|---|---|--|
| <input type="checkbox"/> admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite $y = 0$ | <input type="checkbox"/> admet une asymptote oblique en $+\infty$ | <input type="checkbox"/> est au-dessus de la droite $y = 0$ | <input type="checkbox"/> aucune des trois réponses |
|---|---|---|--|

Q24. L'équation $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$ admet dans $[-\pi, \pi]$

- | | | | |
|--|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> une infinité de solutions | <input type="checkbox"/> 8 solutions | <input type="checkbox"/> 4 solutions | <input type="checkbox"/> aucune solution |
|--|--------------------------------------|--------------------------------------|--|

Q25. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Alors le nombre $N = a^4 + 4b^4$ vérifie :

- | | | | |
|--|--|--|--|
| <input type="checkbox"/> $N < (a - b)^2 + b^2$ | <input type="checkbox"/> $N < (a + b)^2 + b^2$ | <input type="checkbox"/> N est premier | <input type="checkbox"/> N n'est pas premier |
|--|--|--|--|